

Динамические межотраслевые модели. Понятия траектории, стационарной траектории, динамического равновесия.

Динамическая модель Неймана

Модель Неймана – линейная производственная модель, которая учитывает фактор времени.

существующие технологии линейны, т.е. для выпуска продукции в объеме x_j необходимо и достаточно произвести

затраты в объемах $x_j a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, всех отраслей. Этот факт

Вводятся следующие предположения:

- Матрица затрат A и матрица выпусков B постоянны

Более общий подход к описанию функционирования многоотраслевой экономики предоставляет модель Неймана. Предположим, что в экономике все продукты выпускаются в результате конечного набора производственных процессов вида (a^j, b^j) , $j = \overline{1, m}$, где вектор $a^j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ описывает затраты, вектор $b^j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ – выпуск товаров при функционировании j -го процесса с единичной интенсивностью. Обозначим $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда технология производства в экономике задается парой неотрицательных матриц (A, B) , которые называются, соответственно, **матрицей затрат** и **матрицей выпуска**.

Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_n)$ вектор выпусков (интенсивностей).

- экономика функционирует в течение T периодов времени;
- в каждый период $[t-1, t]$ для производства применяется один из процессов множества $C = \{(y, z) \mid \exists x \geq 0: y = Ax, z = Bx\}$, характеризующихся вектором интенсивностей $x(t)$;
- на производство в периоде $[t, t+1]$ могут быть потрачены только те продукты, которые были произведены в период $[t-1, t]$ (модель является замкнутой), т.е. $Ax(t) \leq Bx(t-1)$. Значение величины начальных запасов $Bx(0)$ считается. Последовательность векторов $x(1), x(2), \dots, x(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x(t)\}$, удовлетворяющая этому неравенству, будем называть **планом**.
- производственные затраты осуществляются (и, значит, должны оплачиваться) раньше, чем реализуется произведенная за счет этих затрат продукция:

все товары имеют цены, изменяющиеся от периода к периоду: $p^i(t-1)$ – цена единицы продукции в период $[t-1, t]$, $p(t-1) = (p^1(t-1), \dots, p^n(t-1))$, $p(t-1) \geq 0$. В таком случае доход производственного процесса (a^j, b^j) в период $[t-1, t]$ составляет $\langle p(t), b^j \rangle - \langle p(t-1), a^j \rangle$. Поскольку рассматриваемая экономическая система является замкнутой, то в ней должно выполняться условие сохранения денежной массы. Это означает, что ни один из процессов не должен иметь положительного дохода: $p(t-1)A \geq p(t)B$.

Явная форма записи:

$$p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.10)$$

$$p(t)Bx(t-1) = p(t)Ax(t), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2.11)$$

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется **стационарной**, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \leq Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарна тогда и только тогда, когда $\mu pA \geq pB$.

Для стационарных траекторий интенсивностей и цен условия неизменности денежной массы (2.10) и (2.11) принимают, соответственно, вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p) , где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \leq Bx, \quad \mu pA \geq pB, \quad \mu pAx = pBx, \quad \nu pAx = pBx. \quad (2.12)$$

Из системы (2.12) следует, что $\nu = \mu \stackrel{def}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p) , где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \leq Bx \quad (2.13)$$

$$\alpha pA \geq pB \quad (2.14)$$

$$pAx > 0. \quad (2.15)$$

Модель динамического межотраслевого баланса

Как и в статической модели Леонтьева, рассмотрим экономику, производящую и потребляющую n типов товаров (разделенную на n соответствующих чистых отраслей), совокупный запас которых описывает вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$. Матрица Леонтьева A задает технологические затраты каждой из n чистых отраслей при выпуске единицы продукции. Через ξ_j обозначим производственную мощность j -й отрасли (максимально возможный выпуск, обусловленный наличием основных фондов). Тогда $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – вектор максимально возможного выпуска. Для увеличения выпуска каждой отрасли необходимо увеличить свои мощности, при этом должны быть затрачены продукты других отраслей. Через η_j обозначим желаемое приращение мощности

j -й отрасли, тогда вектор $(\eta_j d_{1j}, \dots, \eta_j d_{nj})$ определяет затраты всех производимых товаров, необходимые для увеличения мощности на желаемую величину η_j . Таким образом, если $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ – вектор, определяющий желаемое увеличение мощности во всей экономике, то суммарные материальные затраты составят $D\eta$, где $D = (d_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Предположим, что для выпуска единицы продукта j -й отрасли требуется l_j трудовых затрат, тогда $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вектор трудовых затрат. Величина L определяет общее количество занятых в экономике, $c = (c_1, \dots, c_n)$ – вектор потребления на одного рабочего (его заработная плата в натуральном выражении).

Теперь выпишем динамическую систему, описывающую развитие экономики в течение некоторого конечного числа периодов времени $t = 1, 2, \dots, T$, в которой общее число занятых, объем производства, мощности и затраты на создание новых мощностей меняются со временем.

Затраты на производство, строительство и оплату труда не превосходят объема производства:

$$Ax(t) + D\eta(t) + L(t)c \leq x(t); \quad (2.18)$$

объем производства не превосходит имеющейся мощности:

$$x(t) \leq \xi(t-1); \quad (2.19)$$

новые мощности создаются на основе имеющихся с учетом желаемого прироста:

$$\xi(t) \leq \xi(t-1) + \eta(t); \quad (2.20)$$

трудовые ресурсы ограничены:

$$\langle l, x(t) \rangle \leq L(t). \quad (2.21)$$

Кроме того, $(x(t), \xi(t), \eta(t), L(t)) \geq 0$, $t = 1, 2, \dots, T$, значение $\xi(0)$ – определяет объем производственных мощностей перед началом функционирования экономики и считается заданным.

Описание экономической системы с помощью модели (2.18)–(2.21) определяется **траекторией** $(x(t), \xi(t), \eta(t), L(t))$, $t = 1, 2, \dots, T$, удовлетворяющей указанной системе неравенств. В общем случае существует бесконечного много траекторий, удовлетворяющих системе (2.18) – (2.21), поэтому необходимо ввести критерий оценки качества траектории, который обеспечил бы возможность выбора какой-то одной, в некотором смысле «наилучшей». В общем случае таким критерием является зависящий от времени и значений координат траектории целевой функционал. Например, можно рассмотреть конечное (терминальное) состояние экономики $(x(T), \xi(T), \eta(T), L(T))$ и в качестве целевого функционала выбрать функцию

$$\langle c_1, x(T) \rangle + \langle c_2, \xi(T) \rangle + \langle c_3, \eta(T) \rangle + c_4 L(T), \quad (2.22)$$

где c_1, c_2, c_3 – n -мерные векторы, c_4 – число.

Тогда оптимизационная задача для модели динамического межотраслевого баланса формулируется следующим образом: при заданном начальном векторе производственных мощностей $\xi(0)$ и заданных коэффициентах терминального функционала (c_1, c_2, c_3, c_4) среди всех траекторий, удовлетворяющих системе (2.18)–(2.21), найти ту, которая доставляет максимум суммы (2.22).

Модель (2.18)–(2.22) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \max \langle \tilde{c}, \tilde{x}(T) \rangle \\ \tilde{A}\tilde{x}(t) \leq \tilde{B}\tilde{x}(t-1), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\tilde{x}(t) \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \tilde{x}(0) = (0, 0, \xi(0), 0) \text{ – задано.}$$

Здесь

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & D & c \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = (x, \xi, \eta, L), \quad \tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4).$$